תשובות לשאלות הסתברות בעברית

**שאלה 1 א':**

יהיו A,B מאורעות. על פי חוק בייס מתקיים:

בנוסף נשתמש בהגדרת הסתברות מותנית כדרך נוספת לחישוב:

בשאלה אנו יודעים שאלביס ואחיו הם תאומים ששניהם ממין זכר. השאלה היא מה ההסתברות שהם תאומים זהים. כלומר השאלה היא מהי ההסתברות שאלביס ואחיו תאומים זהים בהינתן שהם תאומים זכרים:

לפי חוק בייס מתקיים:

כאשר מרחב המדגם שלנו הוא כל האוכלוסייה.

1. נשים לב ש היא ההסתברות שלידה של תאומים זהים תהיה לידה של תאומים ממין זכר שהיא כמובן 50 אחוז או , כי הסיכוי להוליד בן  
   הוא ותאומים זהים הם מאותו מין (לכן התאומים זכרים אמ"מ אחד התאומים זכר והסיכוי של זה הוא ).
2. היא ההסתברות שלידה **אקראית** כלשהי מתוך האוכלוסייה היא לידה של תאומים זהים, ונתון שהסתברות זאת היא 1/300.
3. היא ההסתברות שלידה **אקראית** כלשהי מתוך האוכלוסייה היא לידה של תאומים זכרים, אבל נשים לב שכל הלידות של תאומים זכרים הם לידות של תאומים זכרים זהים או של תאומים זכרים לא זהים ולכן מתקיים:
   1. היא ההסתברות שלידה אקראית כלשהי מתוך האוכלוסייה היא לידה של תאומים זכרים,שאינם זהים. ובכן אנחנו יודעים ש1/125 מהלידות הן לידות של תאומים לא זהים והסיכוי להוליד זכר הוא ½ ולכן מתקיים:

ולכן לפי חוק בייס ,א ,ב ו-ג מתקיים:

**ולכן ההסתברות שאלביס היה תאום זהה היא**

נוכיח זאת גם בעזרת הגדרת הסתברות מותנית: ע"פ הגדרת ההסתברות המותנית מתקיים:

1. כאשר היא ההסתברות שלידה תהיה גם לידה של תאומים זכרים וגם לידה של תאומים זהים – כלומר זאת ההסתברות שהלידה תהיה לידה של תאומים זכרים זהים- שהיא: .

ולכן ע"פ ההגדרה של הסתברות מותנית וע"פ א' מתקיים:

**שאלה 1 ב':** אנו צריכים לחשב את ההסתברות שאריק בחר את קערה 1, בהינתן שהעוגייה שלקח היא עוגיית שוקולד, כלומר אנו נדרשים לחשב את ההסתברות: .

לפי משפט בייס מתקיים:

1. היא ההסתברות שבבחירה אקראית מקערה 1 יצא עוגיית שוקולד, שזה כמובן כמות עוגיות השוקולד שיש בקערה 1 לחלק לכמות כלל העוגיות בקערה 1 כלומר
2. היא ההסתברות לבחור בקערה 1 מבין שתי הקערות – כלומר (כי הקערות נבחרות באקראי)
3. היא ההסתברות לקבל עוגיית שוקולד על ידי תהליך הלקיחה של אריק, נחשב זאת:  
     
   ולכן ע"פ חוק בייס, א', ב' ו-ג' מתקיים:

ולכן ההסתברות שאריק בחר בקערה 1 היא

גם כאן ניתן להוכיח זאת בעזרת ההגדרה של הסתברות מותנית.

**שאלה 2:**

על פי נתוני השאלה אנחנו צריכים לחשב את ההסתברות שיצאה סוכריה צהובה מהשקית משנת 1994 בהינתן שמתוך שתי שקיות (שאחת מ1994 והשניה מ1996) יצאה סוכריה צהובה אחת והשניה ירוקה.  
כלומר נחשב את:  
על פי חוק בייס מתקיים:

1. היא ההסתברות שנשלוף מהשקית מ1994 סוכריה צהובה, אחוז הסוכריות הצהובות מתוך השקית מ1994 הוא 0.2 ולכן הסתברות המדוברת שווה ל0.2.
2. היא ההסתברות שמתוך שליפה של סוכריה אחת מכל שקית יצא סוכריה אחת צהובה והשניה ירוקה.   
   וישנם שני אפשריות: 1. שהצהוב מ1994 והירוק מ1996.  
    2. שהירוק מ1994 והצהוב מ1996.  
   ולכן מתקיים:  
   אנחנו יודעים את האחוז של כל סוכריה מתוך כל שקית ולכן נציב את האחוזים הנתונים וכך מתקיים:  
   כלומר:
3. היא ההסתברות שיצא מאחת השקיות צהוב ומהשקית השנייה ירוק בהינתן שידוע שיצא צהוב מהשקית מ1994.המצב היחידי שבו יצא צהוב וגם ירוק זה כאשר בשקית של 1996 יוצא ירוק. ולכן מתקיים השוויון:  
   ולכן:

לסיכום לפי חוק בייס, טענות 1,2 ו-3 מתקיים:

ולכן בהתאם לכל הנתונים ההסתברות שהסוכריה הצהובה יצאה מהשקית משנת 1994 היא 0.74

**שאלה 3:**

**א.** יהיו A,B מאורעות. לפי חוק בייס מתקיים:

נסמן את המאורעות שבשאלה כך:

Positive = המאורע שיצאתי חיובי בבדיקה לשפעת חזירים.  
sick = המאורע שאני באמת חולה בשפעת החזירים.

מתקיים:

נשים לב שמרחב המדגם בחישוב שלנו הוא כל האוכלוסייה, זאת משום שהדוקטור בחר בי **באקראי** מתוך האוכלוסיה (אין קשר אמיתי בין הציפורן החודרנית שיש לי לבין השפעת)

ומתקיים:

1. זאת ע"פ הנתון ש"אין סיכוי שהבדיקה תגיד על אדם החולה בשפעת החזירים שהוא בריא" כלומר היא תגיד שהוא חולה ויצא positive.
2. זאת משום שמרחב המדגם הוא כל האוכלוסייה ונתון השפעת פוגעת ב1 מתוך 10,000 אנשים באוכלוסייה.
4. (המשוואה הזאת נובעת מהגדרת הסתברות מותנית)
   1. כי רק ל 0.0001 מכמות האנשים באוכלוסייה הם חולי שפעת ולכן 0.9999 מכמות האוכלוסייה לא חולים. (מרחב המדגם הוא האוכלוסייה)
   2. זאת ע"פ הנתון שההסתברות לfalse positive היא 1%. כלומר מתוך כל האנשים שלא חולים - הבדיקה אומרת ל-1% מהם שהם חיוביים.

**ולכן מתקיים:**

1. .זאת ע"פ הנוסחא של הסתברות מותנית.  
   ומתקיים:
   1. לפי הנתון שההסתברות לfalse negative היא 0.

ולכן מתקיים: .

לכן ע"פ סעיפים: ג,ד,ה שלעיל ולפי חוק בייס מתקיים:

לסיכום בתנאים שבסעיף א' הסיכוי שאני חולה לאחר קבלת התשובה החיובית הוא בערך 1%.

**שאלה 3 ב.** נשים לב שבתנאים אלו מרחב המדגם שלי הוא לא כלל האוכלוסייה אלא מרחב המדגם הוא אנשים מישראל שחזרו מתאילנד.  
ולכן מתקיים:

ומתקיים:

1. ע"פ הנתון שהסיכוי לfalse negative הוא 0.
2. ע"פ הנתון שמכל 200 אנשים שחוזרים מתאילנד יש 1 שחולה בשפעת חזירים (נזכור שמרחב המדגם הוא "אנשים שחזרו לישראל מתאילנד" כי אני חזרתי לישראל מתאילנד)
3. (המשוואה הזאת נובעת מהגדרת הסתברות מותנית)
   1. כי רק ל 1/200 מכמות האנשים שחזרו מתאילנד הם חולי שפעת ולכן 199/200 משאר החוזרים מתאילנד לא חולים. (מרחב המדגם הוא האנשים שחזרו מתאילנד)
   2. זאת ע"פ הנתון שההסתברות לfalse positive היא 1%. כלומר מתוך כל האנשים שלא חולים - הבדיקה אומרת ל-1% מהם שהם חיוביים, (נתון זה אמור להיות נכון לכל אוכלוסייה שהיא – גם לחוזרים מתאילנד)

לכן מתקיים:

1. .  
   (זאת ע"פ הנוסחא של הסתברות מותנית.)  
   ומתקיים:
   1. לפי הנתון שההסתברות לfalse negative היא 0.

ולכן מתקיים:

לכן ע"פ סעיפים: ג,ד,ה שלעיל ולפי חוק בייס מתקיים:

לסיכום אם חזרתי מתאילנד ויצאתי חיובי בבדיקה לשפעת החזירים אז ההסתברות שאני באמת חולה בשפעת החזירים היא בערך 33%.

**שאלה 4:**

יהיו A,B מאורעות. על פי חוק בייס מתקיים:

בשאלה אנו יודעים שצארלס ואחיו הם תאומים ששניהם ממין זכר. השאלה היא מה ההסתברות שהם תאומים זהים. כלומר השאלה היא מהי ההסתברות שצארלס ואחיו תאומים זהים בהינתן שהם תאומים זכרים:

לפי חוק בייס מתקיים:

כאשר מרחב המדגם שלנו הוא כל האוכלוסייה.

1. נשים לב ש היא ההסתברות שלידה של תאומים זהים תהיה לידה של תאומים ממין זכר שהיא כמובן 50 אחוז או , כי הסיכוי להוליד בן  
   הוא ותאומים זהים הם מאותו מין (לכן התאומים זכרים אמ"מ אחד התאומים זכר והסיכוי של זה הוא ).
2. היא ההסתברות שלידה **אקראית** כלשהי מתוך האוכלוסייה היא לידה של תאומים זהים, ונתון שהסתברות זאת היא 1/300.
3. היא ההסתברות שלידה **אקראית** כלשהי מתוך האוכלוסייה היא לידה של תאומים זכרים, אבל נשים לב שכל הלידות של תאומים זכרים הם לידות של תאומים זכרים זהים או של תאומים זכרים לא זהים ולכן מתקיים:
   1. היא ההסתברות שלידה אקראית כלשהי מתוך האוכלוסייה היא לידה של תאומים זכרים,שאינם זהים. ובכן אנחנו יודעים ש1/125 מהלידות הן לידות של תאומים לא זהים והסיכוי להוליד זכר הוא ½ ולכן מתקיים:

ולכן לפי חוק בייס ,א ,ב ו-ג מתקיים:

**ולכן ההסתברות שלצארלס היה תאום זהה היא**

**תשובות לשאלות הסתברות באנגלית**

**שאלה 1:**

נסמן ב A את התוצאה המספרית בזריקה הראשונה,ב-B את התוצאה המספרית בזריקה השניה,וב SUM את הסכום של ההטלות. לכן מתקיים:

= ההסתברות שA יתחלק ב3 ו גם B יתחלק ב3. (נשים לב שבמצב זה SUM מתחלק ב3).  
במצב זה זה A יכול להיות 6 או 3. וB יכול להיות 6 או 3, ולכן מתקיים:

= ההסתברות ש A יתחלק ב3 עם שארית 1 וB יתחלק ב3 עם שארית 2 (נשים לב שבמצב זה SUM מתחלק ב3).  
במצב זה A יכול להיות 4 או 1. וB יכול להיות 2 או 5, ולכן מתקיים:

= ההסתברות ש A יתחלק ב3 עם שארית 2 וB יתחלק ב3 עם שארית 1 (נשים לב שבמצב זה SUM מתחלק ב3!!)  
במצב זה A יכול להיות 5 או 2. וB יכול להיות 1 או 4, ולכן מתקיים:

הצגנו בכחול את **כל** האפשריות שבהן סכום הקוביות יתחלק ב3.  
ולכן מתקיים:

ומתקיים:

אנו נדרשים לחשב את הערך המצופה של כמות הכסף שרועי ירוויח מלשחק במשחק. ערך זה הוא המשתנה האקראי וניתן לשים לב שיש לו רק שתי תוצאות אפשריות (להרוויח 6 שח או להפסיד 3 שח), ולכן הנוסחה למציאת ערך זה היא:

כלומר כמות הכסף הצפויה שרועי יקבל במשחק היא 0. זה לא אומר שרועי יקבל 0 במשחק, למעשה זה בלתי אפשרי שהוא יקבל 0, אבל זה אומר שלאחר הרבה מאוד נסיונות כמות הכסף שרועי ירוויח בממוצע מכל משחק- תתקרב ל0.

**שאלה 2:**נסמן את המקרה שאלכס מקבל את המספר מהמרקרים האדומים, ואת המספר מהמרקים הירוקים כך: (a,b).

כל האפשרויות של אלכס לקבל מרקרים שסכומם גדול מ12 הן: (3,10),(4,10),(5,10),(4,9),(5,9),(5,8). סה"כ 6 אפשרויות.  
כל האפשריות של אלכס לקבל מרקרים שסכומם שווה ל12 הן:  
(2,10),(3,9),(4,8),(5,7). סה"כ 4 אפשרויות.  
נשים לב שבכל אחת משתי השקיות יש 5 מרקרים שלכל אחד יש מספר שונה. לכן מספר האפשרויות לקחת שתי מרקרים הוא 5\*5 = 25.  
ולכן ההסתברות לקבל מרקרים שסכומם גדול מ12 היא:   
ההסתברות לקבל מרקרים שסכומם שווה ל12 היא:   
וההסתברות לקבל מרקרים שסכומם קטן מ12 זה המשלים:

כעת נסמן בX את המשתנה האקראי שהוא כמות הכסף שאלכס יקבל בסיבוב של לקיחת מרקרים.  
נשים לב שלמשתנה זה יש מספר סופי של מקרים שהם: .  
ולכן נחשב את "הערך המצופה" של X כך:

נשים לב שp(X=0) היא ההסתברות שסכום המספרים על המרקרים יהיה שווה ל0 (כי אלכס "מרוויח" 0 דולר רק אם הסכום שווה ל12), והראנו שהסתברות זאת היא 0.16  
p(X=5) היא ההסתברות שסכום המספרים על המרקרים יהיה גדול מ12 (כי אלכס מרוויח 5 דולר רק אם הסכום גדול מ12), שהראנו שהסתברות זאת היא 0.24  
p(X=-6) היא ההסתברות שסכום המספרים על המרקרים יהיה קטן מ12 (כי אלכס מפסיד 6 דולר רק אם הסכום קטן מ12), שהראנו שהסתברות זאת היא 0.6

ולכן מתקיים:  
ולכן ה"ערך המצופה" שאלכס ירוויח במשחק הוא דולר (כלומר אלכס צפוי להפסיד 2.4 דולר במשחק).

**שאלה 3:**  
אם נסמן בX את המשתנה האקראי שהוא מספר הגברים שבפגישה עם המנכ"ל, אז ההתפלגות של המשתנה הזה היא סופית כי ישנם מספר סופי של תוצאות אפשריות לX (מספרים שלמים בין- 0 ל- 8) ויותר מזה - זהו משתנה אקראי בינומי, זאת משום ש:  
1. כל בחירה של אדם בבפגישה היא בלתי תלוייה בבחירה של אדם אחר בפגישה.  
2. כל בחירה של אדם בפגישה היא בחירת גבר(הצלחה) או אי בחירה בגבר(כשלון).  
3. הסיכוי בבחירה בגבר היא קבועה (כמעט.. אנו לוקחים רק 8 גברים מתוך 200 ולכן זה לא משנה משמעותית את ההסתברות לבחור גבר, היא נשארת בערך 0.4 – כאחוז הגברים בחברה.).  
ולכן ההתפלגות של המשתנה הזה היא בינומית ונשתמש בנוסחה של חישוב הממוצע של התפלגות בינומית:  
ובנוסחה לחישוב סטיית התקן של התפלגות בינומית:  
כאשר n הוא מספר האנשים שלוקחים לפגישה - 8 (מספר הנסיונות)  
P היא ההסתברות לכך שנבחר בגבר (הצלחה) 0.4 כאחוז הגברים בחברה – זאת הערכה מאוד טובה כי אנחנו מוציאים רק 8 גברים מתוך 200.  
1-P היא ההסתברות לא לבחור בגבר (כישלון) 0.6.  
ולכן מתקיים:  
*לסיכום:  
הממוצע של מספר הגברים שיבחרו בכל חודש הוא 3.2  
וסטיית התקן של מספר הגברים שיבחרו בכל חודש היא: 1.385*

***שאלה 4:***

*נתון שהממוצע הוא 26(אלף דולר) וסטיית התקן היא 2(אלף דולר).  
כלומר:   
נתון שההתפלגות של X היא התפלגות נורמלית ולכן נסמן: כאשר z היא ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית (כלומר עם ).  
אנחנו צריכים למצוא את . כעת נחשב זאת בעזרת נרמול (standardization) ההתפלגות של X, כלומר נחשב את   
מתקיים:  
נשים לב ש זה השטח שבין ערכי הX ה-2 וה-0 בהתפלגות הבינומית הסטנדרטית, ושטח זה שווה לשטח שבין ל2 פחות השטח שבין ל0, כלומר מתקיים: ועל פי טבלת ההתפלגות הבינומית הסטנדרטית (z score) אנו יודעי שמתקיים:*

*ולסיכום מתקיים:*

**שאלה 5:**

ניתן לראות לפי הגרף שההתפלגות היא מתמשכת (לא בדידה), כלומר X יכול לקבל כל ערך בין 5 ל0. ולכן ההסתברות לקבל ערך מסויים היא 0 (למשל ההסתברות שX=2 היא 0) וניתן לחשב את ההסתברות שהערך של X יהיה בין תחום ערכים (למשל 4>x>3), הסתברות זו תהיה חיובית.  
נשים לב ש זאת משום שההסתברות ש X=3 היא 0.  
וכדאי לחשב את נצתרך לחשב את השטח שמתחת לגרף בתווך .  
שטח זה זהה לשטח שמתחת לגרף בתווך , זאת משום שבתווך הגרף כבר לא קיים ולכן אין שטח שמתחת לגרף.  
השטח מתחת לגרף בתווך מורכב ממשולש אחד שהגובה שלו הוא 0.4 והבסיס שלו הוא 2 יחידות ולכן השטח הוא:   
ולכן

*שאלה 6:* ***נסמן את X בתור המשתנה האקראי המייצג את מספר העובדים ההורים שנבחרו מתוך 4 עובדים שנבחרו אקראית.  
בדיוק כמו בהסבר בשאלה 5 משתנה אקראי זה הוא בינומי וההתפלגות שלו היא התפלגות בינומית ולכן נוכל לחשב את ההסתברות שיבחרו בדיוק 3 עובדים הורים מתוך 4 עובדים בעזרת פונקציית ההסתברות:***

**כאשר k זה מספר העובדים ההורים הרצויים,  
ו-p היא ההסתברות לקבל עובד הורה בבחירה אקראית של עובד בחברה.  
ההסתברות p היא כמעט קבועה כי ישנם 300 עובדים הורים ואנו לוקחים רק שני עובדים סה"כ ולכן ההסתברות לקבל הורה נשארת קבועה (זאת הערכה ממש טובה).  
ומתקיים: p=0.6**

*ולכן ההסתברות שבדיוק 3 מתוך 4 עובדים שיבחרו יהיו עם ילדים היא 0.345.*

**שאלה 7:**

בשאלה הנתונה מספר תוצאות האפשריות למשתנה האקראי X הוא מספר סופי (ובפרט כמות התוצאות האפשריות היא בת מנייה) ולכן X הוא משתנה אקראי בעל התפלגות בדידה (**discrete random variable**) ולכן חלה הנוסחא הבאה:

כאשר:   
 הוא הערך המצופה של המשתנה X (Expected Value) ,  
 הם התוצאות האפשריות למשתנה האקראי (כלומר מאורע מספרי כלשהו – למשל תוצאה אפשרית להטלת קוביה היא שיצא המספר 5).  
ו- היא ההסתברות למאורע .

*לכן נחשב את הערך הערך המצופה של המשתנה X:*

*כלומר הערך המצופה של המשתנה האקראי X הוא 0.*